

【1. 回転楕円体面から球面への正積投影】

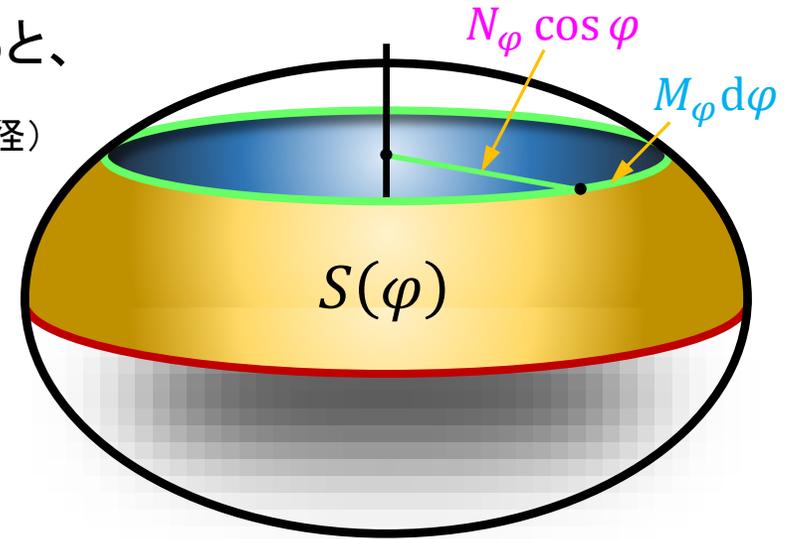
$S(\varphi)$ を赤道と緯度 φ の平行圏に挟まれた緯度帯の面積とすると、

$$S(\varphi) = 2\pi \int_0^\varphi M_\theta N_\theta \cos \theta \, d\theta \quad (M_\theta: \text{子午線曲率半径} \quad N_\theta: \text{卯酉線曲率半径})$$

$$= 2\pi \int_0^\varphi \frac{a^2(1-e^2) \cos \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^2} \, d\theta$$

$$= \pi a^2 \left(\frac{1}{e} - e \right) \left\{ \frac{e \sin \varphi}{1-(e \sin \varphi)^2} + \tanh^{-1}(e \sin \varphi) \right\}$$

で求められる。（出典：国立天文台編、「平成29年理科年表」、丸善出版、P. 585）



- 正積投影後の球面の半径 R の二乗は、 $\frac{1}{2} \times 4\pi R^2 = S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ より、

$$R^2 = \frac{S\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1-e^2}{2e} \tanh^{-1} e \right) \approx 40589732498869.4$$

a は回転楕円体の長半径(6,378,137m)、 e は離心率(※)。

※ 離心率 $e = \sqrt{f(2-f)}$ 、扁平率 $f = \frac{1}{298.257222101}$

- 正積投影後の相当緯度、すなわち正積緯度 $\beta(\varphi)$ は、

$$\beta(\varphi) = \sin^{-1} \frac{S(\varphi)}{S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{で求められる。}$$

(出典：政春尋志、「地図投影法」、朝倉書店、P. 169)

【2. 球面における多角形の面積計算】

以下、緯度 φ には 1. で求めた正積緯度 $\beta(\varphi)$ を代入する。

n 角形 A [点 $_0$ - ... - 点 $_i$ - ... - 点 $_0$]を、[点 $_0$ - 点 $_i$ - 点 $_{i+1}$ - 点 $_0$]で作られるいくつかの三角形 $A_{i,i+1}$ に分割して計算する(右図参照)。

$$\rightarrow A = A_{12} + A_{23} + \dots + A_{n-3,n-2} + A_{n-2,n-1}$$

各三角形の面積 $A_{i,i+1}$ は、各三角形の半周長 s 、辺[点 $_0$ - 点 $_i$]の長さ $d_{0,i}$ 、辺[点 $_i$ - 点 $_{i+1}$]の長さ $d_{i,i+1}$ 、辺[点 $_{i+1}$ - 点 $_0$]の長さ $d_{i+1,0}$ を用いて、以下の式から求める。

$$\rightarrow A_{i,i+1} = E \times R^2 \quad , \quad E = 4 \tan^{-1} \sqrt{\tan \frac{s}{2} \times \tan \frac{s-d_{0,i}}{2} \times \tan \frac{s-d_{i,i+1}}{2} \times \tan \frac{s-d_{i+1,0}}{2}} \quad (\text{L'Huilierの公式})$$

ここで、 s と d は、緯度 φ と経度 λ を用いて以下の式から求める。

$$\rightarrow s = \frac{1}{2}(d_{0,i} + d_{i,i+1} + d_{i+1,0}) \quad , \quad d_{l,m} = 2 \sin^{-1} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_l - \varphi_m}{2} + \cos \varphi_l \times \cos \varphi_m \times \sin^2 \frac{\lambda_l - \lambda_m}{2}} \quad (\text{半正矢関数の公式})$$

また、各三角形の面積を足し込む際の正負は、外積の正負から判定する。

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 \times \cos \lambda_0 & \cos \varphi_0 \times \sin \lambda_0 & \sin \varphi_0 \\ \cos \varphi_i \times \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \times \sin \lambda_i & \sin \varphi_i \\ \cos \varphi_{i+1} \times \cos \lambda_{i+1} & \cos \varphi_{i+1} \times \sin \lambda_{i+1} & \sin \varphi_{i+1} \end{vmatrix} > 0 \text{ ならば } 1$$

そうでなければ -1

多角形の面積の求め方

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34}$$

辺に沿って時計回りに
三角形の面積を計算

任意の多角形に適用可能

