地理院地図の計測機能（面積）

【1. 回転楕円体面から球面への正積投影】

$S(\varphi)$を赤道と緯度 φ の平行圏に挟まれた緯度帯の面積とすると、

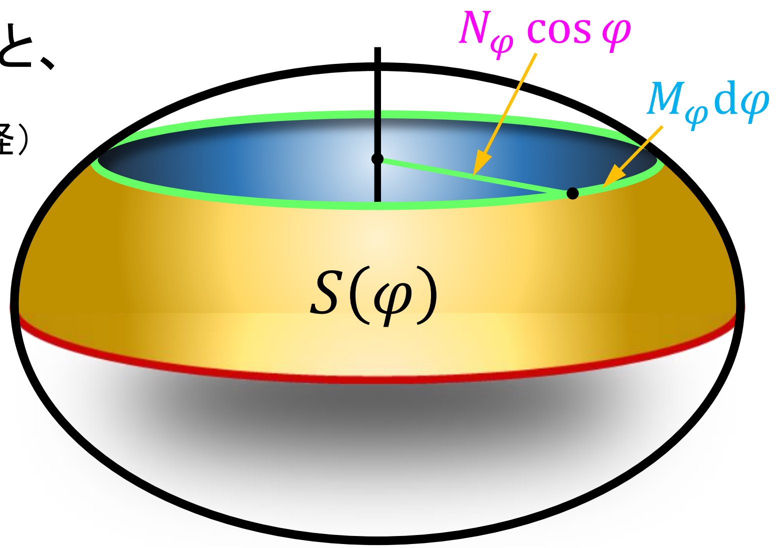
$$S(\varphi) = 2\pi \int_0^{\varphi} M_\theta N_\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta$$

（M_θ：子午線曲率半径　N_θ：卯酉線曲率半径）

$$= 2\pi \int_0^{\varphi} \frac{a^2(1-e^2)\cos\theta}{(1-e^2\sin^2\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \pi a^2\left(\frac{1}{e} - e\right)\left\{\frac{e\sin\varphi}{1-(e\sin\varphi)^2} + \tanh^{-1}(e\sin\varphi)\right\}$$

で求められる。　（出典：国立天文台編、「平成29年理科年表」、丸善出版、P. 585）



- 正積投影後の球面の半径Rの二乗は、$\frac{1}{2} \times 4\pi R^2 = S\left(\frac{\pi}{2}\right)$より、

$$R^2 = \frac{S\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1-e^2}{2e}\tanh^{-1} e\right) \approx 40589732498869.4$$

aは回転楕円体の長半径（6,378,137m）、eは離心率（※）。
※ 離心率　$e = \sqrt{f(2-f)}$　、　扁平率　$f = \frac{1}{298.257222101}$

- 正積投影後の相当緯度、すなわち正積緯度$\beta(\varphi)$は、

$$\beta(\varphi) = \sin^{-1}\frac{S(\varphi)}{S\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

で求められる。

（出典：政春尋志、「地図投影法」、朝倉書店、P. 169）

【2. 球面における多角形の面積計算】

以下、緯度φには 1. で求めた正積緯度$\beta(\varphi)$を代入する。

n角形A[点$_0$ - ･･･ - 点$_i$ - ･･･ - 点$_0$]を、[点$_0$ - 点$_i$ - 点$_{i+1}$ - 点$_0$]で作られるいくつかの三角形A$_{i,\ i+1}$に分割して計算する（右図参照）。

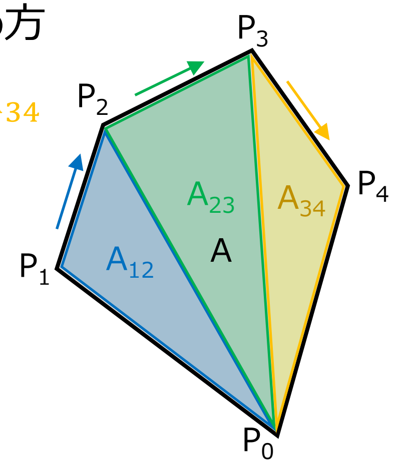
→ $A = A_{12} + A_{23} + \cdots + A_{n-3,n-2} + A_{n-2,n-1}$

多角形の面積の求め方

$A = A_{12} + A_{23} + A_{34}$

辺に沿って時計回りに
三角形の面積を計算

任意の多角形に適用可能



各三角形の面積$A_{i,i+1}$は、各三角形の半周長s、辺[点$_0$ - 点$_i$]の長さ$d_{0,i}$、辺[点$_i$ - 点$_{i+1}$]の長さ$d_{i,i+1}$、辺[点$_{i+1}$ - 点$_0$]の長さ$d_{i+1,0}$を用いて、以下の式から求める。

→ $A_{i,i+1} = E \times R^2$ 、 $E = 4\tan^{-1}\sqrt{\tan\frac{s}{2} \times \tan\frac{s-d_{0,i}}{2} \times \tan\frac{s-d_{i,i+1}}{2} \times \tan\frac{s-d_{i+1,0}}{2}}$ （L'Huilierの公式）

ここで、sとdは、緯度φと経度λを用いて以下の式から求める。

→ $s = \frac{1}{2}\left(d_{0,i} + d_{i,i+1} + d_{i+1,0}\right)$ 、 $d_{l,m} = 2\sin^{-1}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_l - \varphi_m}{2} + \cos\varphi_l \times \cos\varphi_m \times \sin^2\frac{\lambda_l - \lambda_m}{2}}$ （半正矢関数の公式）

また、各三角形の面積を足し込む際の正負は、外積の正負から判定する。

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \cos\varphi_0 \times \cos\lambda_0 & \cos\varphi_0 \times \sin\lambda_0 & \sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i & \cos\varphi_i \times \sin\lambda_i & \sin\varphi_i \\ \cos\varphi_{i+1} \times \cos\lambda_{i+1} & \cos\varphi_{i+1} \times \sin\lambda_{i+1} & \sin\varphi_{i+1} \end{vmatrix} > 0 \text{ ならば } 1$$

そうでなければ -1